

Étude algorithmique et combinatoire de la méthode de Kemeny-Young et du consensus de classements

Robin Milosz

Université de Montréal

30 novembre 2018, Montréal



Outline

1 **Introduction et contexte**

2 **Travaux antérieurs et motivations**

3 **Méthode de Kemeny-Young**

- Réduction d'espace de recherche
- Approches combinées
- Médiane de 3 permutations

4 **Consensus de classements**

5 **Conclusion**



Introduction

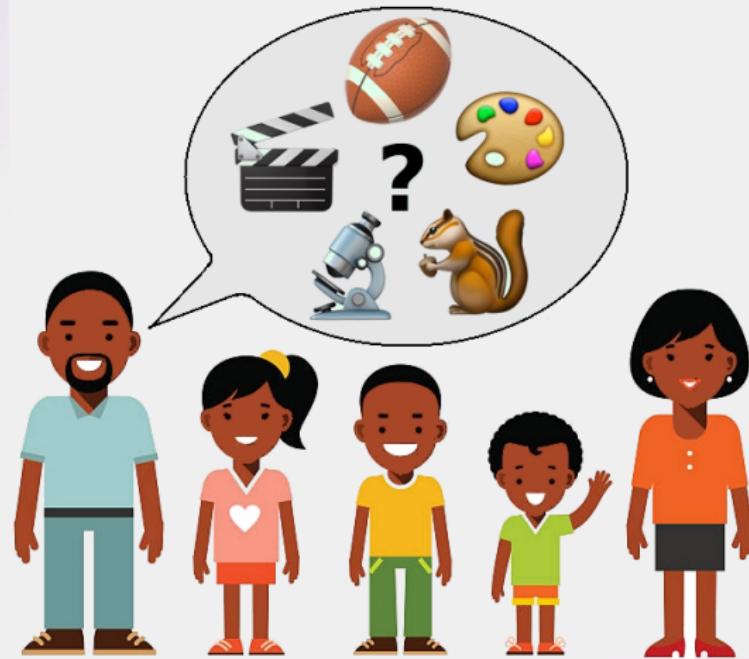


Figure: Quelles activités voulez-vous faire cette fin de semaine?



Introduction



Figure: Les enfants répondent en ordonnant les 5 activités candidates.



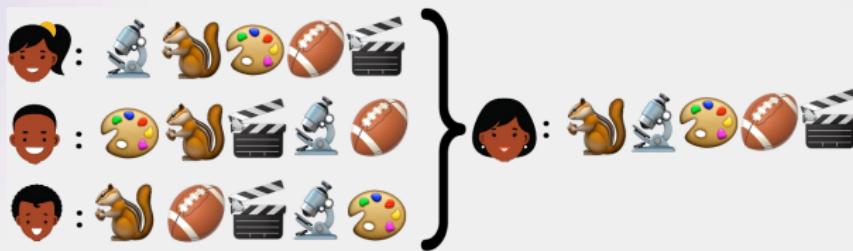
Introduction



Figure: La mère, mathématicienne, trouve un concensus en utilisant le méthode de Kemeny-Young!



Introduction - Modèle



$$\left. \begin{array}{l} \pi_1:[4,5,1,2,3] \\ \pi_2:[1,5,3,4,2] \\ \pi_3:[5,2,3,4,1] \end{array} \right\} \pi^*: [5,4,1,2,3]$$

$$m = 3, n = 5$$



Distance de Kendall- τ et le score de Kemeny

Distance de Kendall- τ

Étant donné deux permutations $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$, cette distance compte le nombre de désaccords entre paires d'éléments:

$$Kt(\pi, \sigma) = \#\{(i, j) | i < j \text{ et } [(i \prec_{\pi} j \text{ et } j \prec_{\sigma} i) \text{ ou } (j \prec_{\pi} i \text{ et } i \prec_{\sigma} j)]\}$$

Score de Kemeny

Étant donné un ensemble de permutations $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}_n$ et une permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$, le *Score de Kemeny* est définie de la façon suivante:

$$K(\pi, \mathcal{R}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{R}} Kt(\pi, \sigma)$$

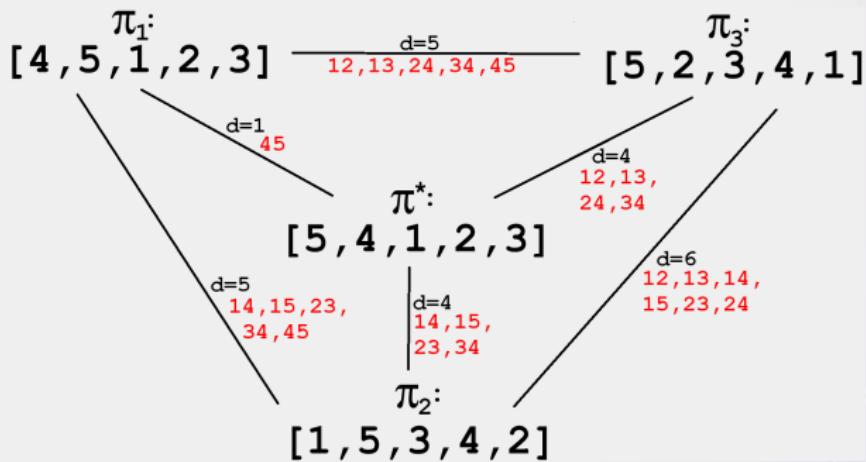


Consensus Kemeny

La permutation médiane

Étant donné un ensemble de permutations $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}_n$, on veut trouver la permutation $\pi^* \in \mathcal{S}_n$ such that:

$$K(\pi^*, \mathcal{R}) \leq K(\pi, \mathcal{R}), \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n.$$



Applications

Exemples de domaines d'application

- ① Système électoral
 - ② **Bioinformatique**
 - ③ Informatique
 - ④ etc.
- Gènes reliés à une maladie (BioConsort)
 - Conformations d'amarrage de protéines
 - Requêtes dans bases de données bio.
(Conqur-bio)
 - Cartes génétiques
 - etc.

```
BI_c:=[[BRCA2], [BRCA1], [TP53], [AKT1], [PIK3CA, PTEN], [CHEK2, ATM], [AR], ..., [TWIST1]]  
IE_c:=[[CBR1, FASN, HSD17B1, MTOR, NME1], [AGR2, AGR3, AKT1, ALOX12,...], ..., [..., TWIST1]]  
PR_c:=[[BRCA1], [BRCA2], [TP53], [AR, ATM, PALB2], [CHEK2], [PIK3CA], [CDH1], ..., [..., HSD17B8]]  
PC_c:=[[AKT1], [NQO1], [CBR1, HSD17B1, PRKCQ], [BRCA1, BRCA2, CHEK2, PIK3CA,...], [..., TWIST1]]
```



Travaux antérieurs et motivations



Sélection de travaux antérieurs

- Système électoral: "Méthode de Kemeny-Young"
H.P. Young et A. Levenglick, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1978
- Compléxité: NP-difficile pour $m \geq 4$, m pair et (?) $m \geq 7$, m impair, mais $m \in \{3, 5\}$ est inconnu
C. Dwork et al. *Proceedings of the 10th WWW*, 2001
G. Bachmeier et al. *arXiv*: <http://arxiv.org/abs/1704.06304v1>, 2017
- Heuristiques et algorithmes
F. Schalekamp et A. van Zuylen *Proceedings of the 11th SIAM ALENEX*, 2009
A. Ali et M. Meila *Mathematical Social Sciences*, 2012
- Réduction d'espace de recherche
M. Truchon *Rapport interne*, 1998
G. Blin et al. *Pure Mathematics and Applications*, 2011
N. Betzler et al. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 2014
- Bornes inférieures
A. Davenport et J. Kalagnanam *19th National Conference on AI*, 2004
V. Conitzer et al. *21st National Conference on AI*, 2006



Motivations

Réduction d'espace de recherche

- très peu exploré
- A. Ali et M. Meila (2012) recommandent d'investiguer

Médiane de 3 permutations

- le cas $m = 3$ permutations est ouvert
- cas à la frontière entre "facile" et "difficile"

Classements avec égalités

- peu exploré
- beaucoup plus d'applications



Réduction d'espace de recherche

- suite du travail de maîtrise (CALDAM 2016)
- version étendue publiée dans Journal of Discrete Applied Mathematics



Réduction d'espace - contraintes MOT

$A = \{ [7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],$
 $[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4],$
 $[5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6] \}$

$8 < 2$

always

$3 < 1$

$3 < 4$

$3 < 6$

$5 < 4$

$7 < 6$

$8 < 2$

$8 < 4$

$8 < 6$



Réduction d'espace - contraintes MOT

$A = \{ [7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],$
 $[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4],$ $1 < 4$
 $[5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6] \}$

always	MOT 1.0
$3 < 1$	$1 < 4$
$3 < 4$	$1 < 6$
$3 < 6$	$2 < 6$
$5 < 4$	$3 < 2$
$7 < 6$	$5 < 1$
$8 < 2$	$7 < 2$
$8 < 4$	
$8 < 6$	add (closure)
	$5 < 6$



Réduction d'espace - contraintes MOT

$A = \{ [7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],$
[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4],
[5, 8, 7, 4, 1, 2, 7, 6] \}

5 < 2

always	MOT 1.0	MOT 2.0
3 < 1	1 < 4	2 < 4
3 < 4	1 < 6	5 < 2
3 < 6	2 < 6	7 < 4
5 < 4	3 < 2	
7 < 6	5 < 1	
8 < 2	7 < 2	
8 < 4		
8 < 6	add (closure)	
	5 < 6	



Réduction d'espace - contraintes MOT

$A = \{ [7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],$
[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4],
[5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6] \}

1 < 2

always	MOT 1.0	MOT 2.0	MOT 3.0
→ 3 < 1	1 < 4	2 < 4	1 < 2
3 < 4	1 < 6	5 < 2	5 < 7
3 < 6	2 < 6	7 < 4	6 < 4
5 < 4	→ 3 < 2		
7 < 6	5 < 1		
8 < 2	7 < 2		
8 < 4			
8 < 6	add (closure)		
	5 < 6		



Réduction d'espace - contraintes MOTe

$A = \{ [7, 8, 1, 3, 6, 1, 5, 4],$
 $[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4],$
 $[5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6] \}$

$3 < 7$

always

$3 < 1$

$3 < 4$

$3 < 6$

$5 < 4$

$7 < 6$

$8 < 2$

$8 < 4$

$8 < 6$

MOT 3.0

$1 < 4$

$1 < 6$

$2 < 6$

$3 < 2$

$5 < 1$

$7 < 2$

$5 < 6$

MOT 3.0_e

$3 < 7$

extension au cas de l'égalité...



Réduction d'espace - contraintes MOTe

$A = \{ [\begin{matrix} 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 8 \end{matrix}] \begin{matrix} 2, 3, 6, 1, 5, 4 \\ 6, 2, 4 \\ 3, 4, 1, 2, 7, 6 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 7 < 8 \\ (3) & (4) & (2) \end{matrix} \}$

$7 < 8$

always	MOT 3.0	MOT 3.0e
$3 < 1$	$1 < 4$	$2 < 4$
$3 < 4$	$1 < 6$	$5 < 2$
$3 < 6$	$2 < 6$	$\begin{matrix} (4) \rightarrow 7 < 4 \\ 3 < 7 \end{matrix}$
$5 < 4$	$3 < 2$	$1 < 2$
$7 < 6$	$5 < 1$	$5 < 7$
$\begin{matrix} (2) \rightarrow 8 < 2 \\ (4) \rightarrow 8 < 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (2) \rightarrow 7 < 2 \\ 5 < 6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 < 4 \\ \boxed{7 < 8} \end{matrix}$
$8 < 6$		$\begin{matrix} 3 < 5 \\ 5 < 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 < 8 \\ 8 < 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 < 7 \\ 8 < 7 \end{matrix}$

$7 < 8$!!!

La fermeture transitive est très importante.



Réduction d'espace - résultats avec MOTe

Signification du MOTe

- Valide seulement sur un sous-ensemble des médianes
- Implémentation vectorielle qui accélère le calcul (vs MOT)
- Complexité $O(n^2m + n^3)$ en temps et $O(n^3)$ en espace
- Grande amélioration de la réduction d'espace de recherche:
 - ▶ $m = 4, n = 15$: 52.01% devient 97.70% (rand.unif.)
 - ▶ $m = 5, n = 30$: 40.38% devient 59.50% (rand.unif.)
 - ▶ $m = 10, n = 60$: 22.09% devient 31.10% (rand.unif.)



Approches combinées

- présenté à la conférence IWOCA 2017
- version étendue publiée dans Journal of Discrete Algorithms

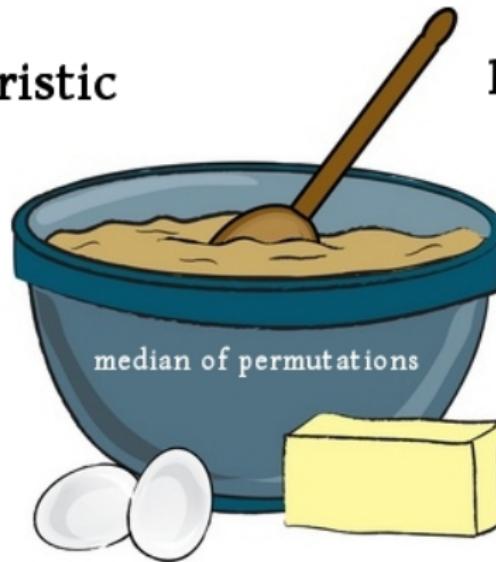


Approches combinées - Plan

Space reduction

Heuristic

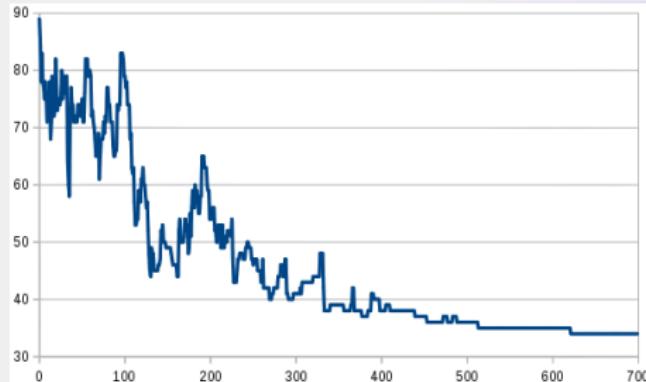
Branch
& Bound



Approches combinées - Heuristique SA

Heuristique du recuit simulé (SA)

- processus itératif
- solution initiale et température initiale
- choisir une solution du voisinage (fonction de perturbation)
- accepter immédiatement une meilleure solution
- accepter une mauvaise solution avec probabilité
- refroidir le système



Approches combinées - Contraintes LUBC

Lower-Upper Bounds Constraints (LUBC)

Préalables:

- avoir une bonne approximation par SA
- avoir calculé les contraintes MOT
- utiliser la borne inférieure de Conitzer et al. (2006)

Fonctionnement:

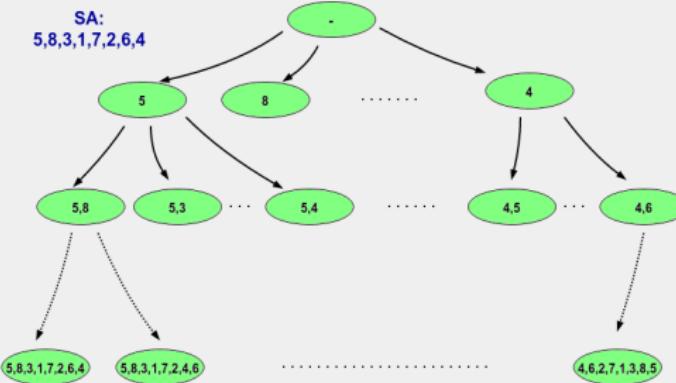
- supposer une nouvelle contrainte $i \prec j$
- calculer la borne inférieure augmentée avec les contraintes + $i \prec j$
- comparer les bornes inférieure et supérieure
- répéter



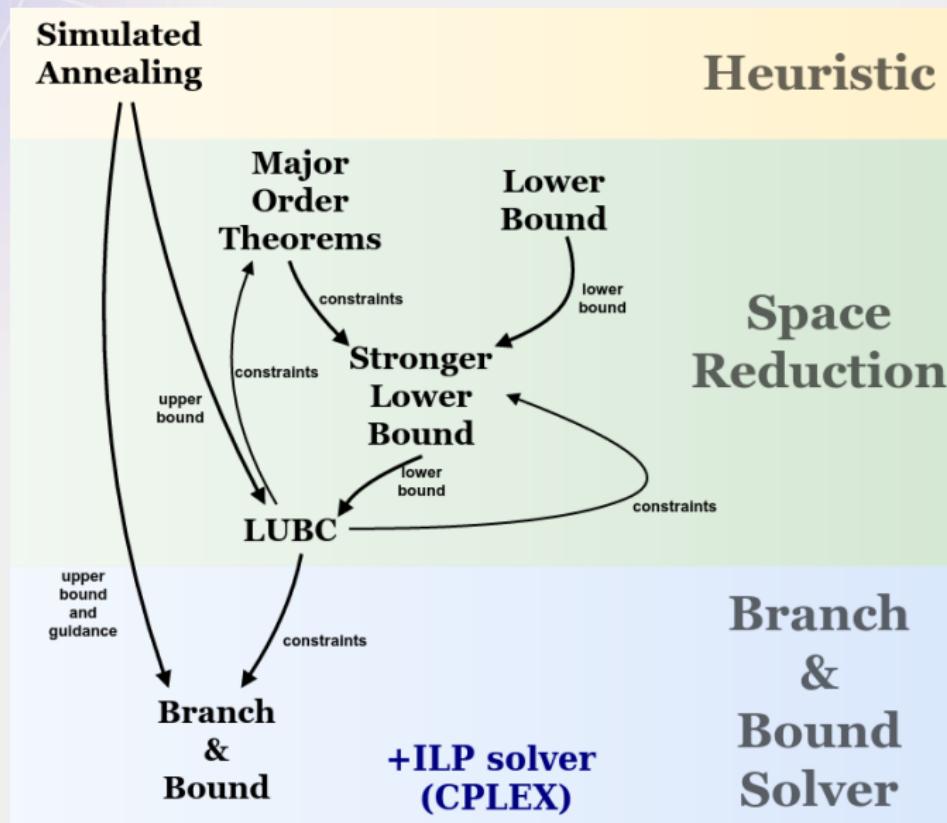
Approches combinées - BnB raffiné

Branch-and-Bound

- guidage par recuit simulé
- contraintes MOT+LUBC
- structures de données évitant la répétition
- plusieurs autres raffinements



Approches combinées - tout ensemble



Approches combinées - évaluation et comparaison

évaluation sur des données

- données synthétiques générées par mélange de Fisher-Yates
- données réelles de PrefLib.org (315 instances), ensembles de $m = 4$ à $m = 5000$ permutations de taille $n = 3$ à $n = 242$

méthode compétitives

- SA donne l'optimal plus de 94% des fois sur rand.unif. $n \leq 40$
- SA a trouvé l'optimal sur 314/315 instances de PrefLib
- SA vs FUR et SigFUR (Badal et al. 2018)
- MOTe+LUBC ordonnent $\geq 98\%$ sur PrefLib $n < 60$, souvent tout
- MOTe+LUBC vs Extended Condorcet Criterion
- BnB raffiné vs tree-search et prog.dyn. (Betzler et al. 2014)
- ILP renforcé a résolu "ED-00015-00000004.soc" ($m = 5, n = 242$)

Approches combinées - évaluation et comparaison

évaluation sur des données

- données synthétiques générées par mélange de Fisher-Yates
- données réelles de PrefLib.org (315 instances), ensembles de $m = 4$ à $m = 5000$ permutations de taille $n = 3$ à $n = 242$

méthode compétitives

- SA donne l'optimal plus de 94% des fois sur rand.unif. $n \leq 40$
- SA a trouvé l'optimal sur 314/315 instances de PrefLib
- SA vs FUR et SigFUR (Badal et al. 2018)
- MOTe+LUBC ordonnent $\geq 98\%$ sur PrefLib $n < 60$, souvent tout
- MOTe+LUBC vs Extended Condorcet Criterion
- BnB raffiné vs tree-search et prog.dyn. (Betzler et al. 2014)
- ILP renforcé a résolu "ED-00015-00000004.soc" ($m = 5, n = 242$)

Approches combinées - évaluation et comparaison

évaluation sur des données

- données synthétiques générées par mélange de Fisher-Yates
- données réelles de PrefLib.org (315 instances), ensembles de $m = 4$ à $m = 5000$ permutations de taille $n = 3$ à $n = 242$

méthode compétitives

- SA donne l'optimal plus de 94% des fois sur rand.unif. $n \leq 40$
- SA a trouvé l'optimal sur 314/315 instances de PrefLib
- SA vs FUR et SigFUR (Badal et al. 2018)
- MOTe+LUBC ordonnent $\geq 98\%$ sur PrefLib $n < 60$, souvent tout
- MOTe+LUBC vs Extended Condorcet Criterion
- BnB raffiné vs tree-search et prog.dyn. (Betzler et al. 2014)
- ILP renforcé a résolu "ED-00015-00000004.soc" ($m = 5, n = 242$)

Approches combinées - évaluation et comparaison

évaluation sur des données

- données synthétiques générées par mélange de Fisher-Yates
- données réelles de PrefLib.org (315 instances), ensembles de $m = 4$ à $m = 5000$ permutations de taille $n = 3$ à $n = 242$

méthode compétitives

- SA donne l'optimal plus de 94% des fois sur rand.unif. $n \leq 40$
- SA a trouvé l'optimal sur 314/315 instances de PrefLib
- SA vs FUR et SigFUR (Badal et al. 2018)
- MOTE+LUBC ordonnent $\geq 98\%$ sur PrefLib $n < 60$, souvent tout
- MOTE+LUBC vs Extended Condorcet Criterion
- BnB raffiné vs tree-search et prog.dyn. (Betzler et al. 2014)
- ILP renforcé a résolu "ED-00015-00000004.soc" ($m = 5, n = 242$)

Approches combinées - évaluation et comparaison

évaluation sur des données

- données synthétiques générées par mélange de Fisher-Yates
- données réelles de PrefLib.org (315 instances), ensembles de $m = 4$ à $m = 5000$ permutations de taille $n = 3$ à $n = 242$

méthode compétitives

- SA donne l'optimal plus de 94% des fois sur rand.unif. $n \leq 40$
- SA a trouvé l'optimal sur 314/315 instances de PrefLib
- SA vs FUR et SigFUR (Badal et al. 2018)
- MOTe+LUBC ordonnent $\geq 98\%$ sur PrefLib $n < 60$, souvent tout
- MOTe+LUBC vs Extended Condorcet Criterion
- BnB raffiné vs tree-search et prog.dyn. (Betzler et al. 2014)
- ILP renforcé a résolu "ED-00015-00000004.soc" ($m = 5, n = 242$)

Approches combinées - évaluation et comparaison

évaluation sur des données

- données synthétiques générées par mélange de Fisher-Yates
- données réelles de PrefLib.org (315 instances), ensembles de $m = 4$ à $m = 5000$ permutations de taille $n = 3$ à $n = 242$

méthode compétitives

- SA donne l'optimal plus de 94% des fois sur rand.unif. $n \leq 40$
- SA a trouvé l'optimal sur 314/315 instances de PrefLib
- SA vs FUR et SigFUR (Badal et al. 2018)
- MOTe+LUBC ordonnent $\geq 98\%$ sur PrefLib $n < 60$, souvent tout
- MOTe+LUBC vs Extended Condorcet Criterion
- BnB raffiné vs tree-search et prog.dyn. (Betzler et al. 2014)
- ILP renforcé a résolu "ED-00015-00000004.soc" ($m = 5, n = 242$)

Médiane de 3 permutations

- cas ouvert
- présenté à la conférence IWOCA 2018



Médiane de 3 permutations - Graphe de majorité

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1:[4, 5, 1, 2, 3] \\ \pi_2:[1, 5, 3, 4, 2] \\ \pi_3:[5, 2, 3, 4, 1] \end{array} \right\} \pi^*:[5, 4, 1, 2, 3]$$

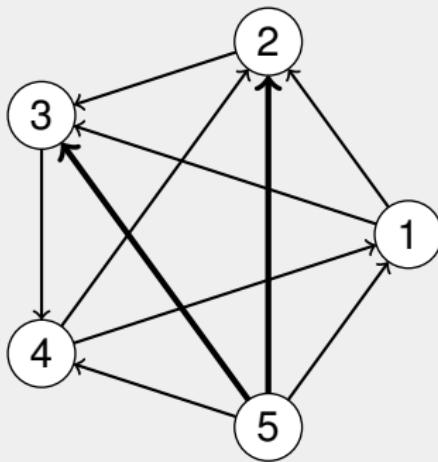


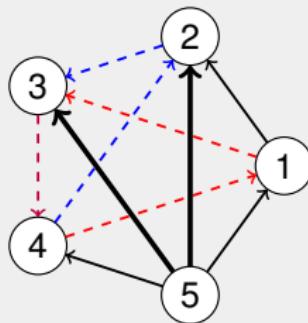
Figure: Le graphe de majorité de l'ensemble $\mathcal{R} = \{[4, 5, 1, 2, 3], [1, 5, 3, 4, 2], [5, 2, 3, 4, 1]\}$. Les arcs en gras ont un poids de 3 alors que les autres ont un poids de 1.



Médiane de 3 permutations - Théorème principale

Théorème sur les 3-cycles

Soit $\mathcal{R} \subset S_n$ un ensemble de 3 permutations. Soit $G_{\mathcal{R}} = (V, E)$ le graphe de majorité associé. Soit π^* une permutation médiane de \mathcal{R} . Si un arc (i, j) de $G_{\mathcal{R}}$ n'est pas contenu dans aucun 3-cycle, alors $i \prec_{\pi^*} j$.



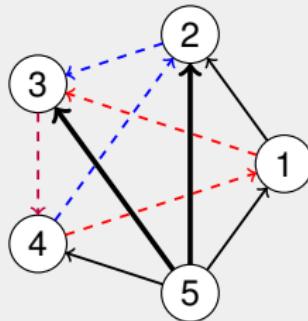
Conjecture 1

Le théorème des 3-cycles est valide pour m impair.

Médiane de 3 permutations - Théorème principale

Théorème sur les 3-cycles

Soit $\mathcal{R} \subset S_n$ un ensemble de 3 permutations. Soit $G_{\mathcal{R}} = (V, E)$ le graphe de majorité associé. Soit π^* une permutation médiane de \mathcal{R} . Si un arc (i, j) de $G_{\mathcal{R}}$ n'est pas contenu dans aucun 3-cycle, alors $i \prec_{\pi^*} j$.



Conjecture 1

Le théorème des 3-cycles est valide pour m impair.

Médiane de 3 permutations - lien avec 3HS

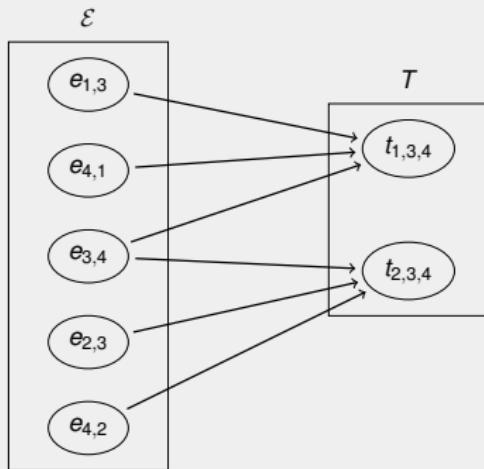


Figure: Le problème du 3-Hitting Set avec \mathcal{E} , l'ensemble d'arcs impliqués et T , l'ensemble des 3-cycles de l'exemple précédent. Dans ce cas, sélectionner $e_{3,4}$ couvre tous les 3-cycles donc $S = \{e_{3,4}\}$ et $\#S = 1$.

Conjecture 2

Résoudre la médiane de 3 permutations revient à résoudre un problème 3-Hitting Set.

Médiane de 3 permutations - lien avec 3HS

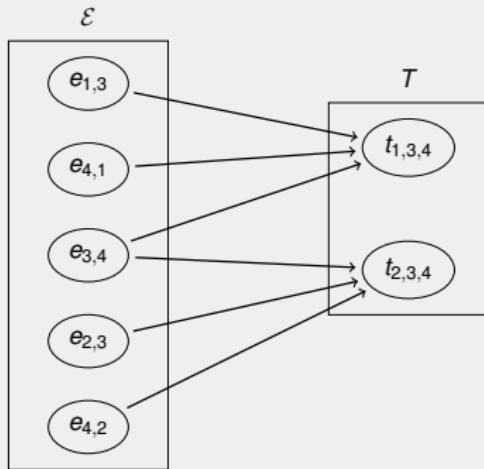


Figure: Le problème du 3-Hitting Set avec \mathcal{E} , l'ensemble d'arcs impliqués et T , l'ensemble des 3-cycles de l'exemple précédent. Dans ce cas, sélectionner $e_{3,4}$ couvre tous les 3-cycles donc $S = \{e_{3,4}\}$ et $\#S = 1$.

Conjecture 2

Résoudre la médiane de 3 permutations revient à résoudre un problème 3-Hitting Set.

Médiane de 3 permutations - Résultats

Signification du théorème principale (pour $m = 3$)

- Englobes les réductions d'espace:
 - Théorème "toujours" (critère de Pareto)
 - Règle de la 3/4-Majorité
 - Critère de Condorcet Étendu
 - MOT
- Accélère les calculs pour résoudre

ID	n	E	F	G	
		time ILP normal	time ILP 3 cyc.thm.	acc. factor E/F	time 3HS
ex1	29	57.033	23.992	2.4	1.507
ex2	20	17.791	4.582	3.9	0.285
ex3	44	192.875	35.615	5.4	0.241
ex4	64	622.724	192.885	3.2	4.915
ex5	24	30.349	5.614	5.4	0.072
ex6	67	995.763	388.635	2.6	28.514
ex7	23	27.296	7.602	3.6	0.369



Propriétés sur les classements

- se place à la suite des travaux de Pierre Andrieu (LRI, Paris-Sud)
- en attente pour soumission



Classements

Classements

- liste ordonnée d'éléments
- peut contenir des éléments à égalité et des éléments absents

exemple: $R = [[1, 3], [5], [6, 8, 9], [4], [2]]$

Consensus de classements

- distance de Kendall- τ généralisée
- score de Kemeny généralisé
- consensus complet (contient tous les éléments)

Notre travail

- Généralisation des MOT



Conclusion



Conclusion

- La médiane de permutations (méthode de Kemeny-Young) est un problème NP-Difficile mais avec plusieurs applications intéressantes
- Nous avons présenté plusieurs résultats dans des voies moins explorées:
 - ▶ une réduction d'espace de recherche efficace
 - ▶ une approche combinée (SA, MOTe+LUBC, BnB, ILP)
- nous avons investigué le cas ouvert $m = 3$, nous avons obtenu le théorème des 3-cycles et une borne inférieure stricte
- nous avons énoncé 2 conjectures sur les cas $m = 3$ et m impair
- nous avons transféré des idées de réduction d'espace pour le problème du consensus de classements



Remerciements



Organismes: FRQNT et Mitacs

Le jury: Pierre L'Écuyer, Mathieu Blanchette, Nadia El-Mabrouk, Martin Bilodeau

Membres du LRI: Sarah Cohen-Boulakia, Pierre Andrieu, Alain Denise, Adeline Pierrot, Christelle Rovetta, Bryan Brancotte, etc.

Membres du LBIT: Emmanuel Noutahi, Manuel Lafond, Charles Desharnais, Anna Thibert, Samuel Briand, Miguel Sautié, Marie Gasparoux, etc.

Mes amis...

Anna Klepacka

Nicole Burke

Directrice de recherche: Sylvie Hamel



Questions?

Merci!



Matériel supplémentaire



Matériel supplémentaire

Exemple distance Kendall- τ :

$$\pi = [4,5,1,2,3]$$

$$\sigma = [1,5,3,4,2]$$

$$(1,2) \quad (\mathbf{2},\mathbf{3}) \quad (\mathbf{3},\mathbf{4}) \quad (\mathbf{4},\mathbf{5})$$

$$(1,3) \quad (2,4) \quad (3,5)$$

$$(\mathbf{1},\mathbf{4}) \quad (2,5)$$

$$(\mathbf{1},\mathbf{5})$$

$$\pi = [4,5,1,2,3]$$

$$[\mathbf{5},\mathbf{4},1,2,3]$$

$$[5,\mathbf{1},\mathbf{4},2,3]$$

$$[\mathbf{1},\mathbf{5},4,2,3]$$

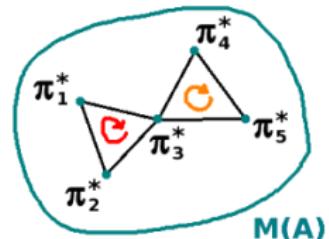
$$[1,5,4,\mathbf{3},\mathbf{2}]$$

$$\sigma = [1,5,\mathbf{3},\mathbf{4},2]$$

Matériel supplémentaire

$A = \{ [7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],$
[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4],
[5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6] \}

$M(A) = \{ \pi_1^* = [5, 8, 3, 1, 7, 2, 6, 4],$
 $\pi_2^* = [8, 3, 5, 1, 7, 2, 6, 4],$
 $\pi_3^* = [3, 5, 8, 1, 7, 2, 6, 4],$
 $\pi_4^* = [3, 5, 1, 7, 8, 2, 6, 4],$
 $\pi_5^* = [3, 5, 7, 8, 1, 2, 6, 4] \}$



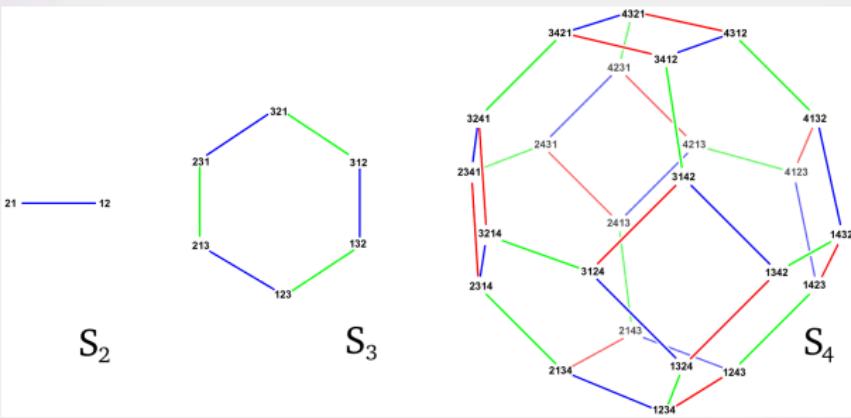
Matériel supplémentaire

Noms synonymes du problème de la médiane:

- problème de la médiane de permutations (*median of permutations problem*)
- méthode de Kemeny-Young (*Kemeny-Young method*)
- règle de Kemeny (*Kemeny rule*)
- règle de classement de Kemeny (*Kemeny ranking rule*)
- problème de Kemeny (*Kemeny's problem*)
- problème de classement de Kemeny (*Kemeny ranking problem*)
- problème d'agrégation de classements de Kemeny (*Kemeny Rank Aggregation problem*)
- agrégation optimale de Kemeny (*Kemeny Optimal Aggregation*)
- agrégation de Kemeny (*Kemeny Aggregation*) ou p -KAGG
- problème d'agrégation de classements (*Rank Aggregation problem*)
- problème de minimisation de croisements de k permutations (*Crossing Minimization of k Permutations problem*) ou PCM- k
- problème du classement consensus (*Consensus Ranking problem*)
- schéma de vote de Kemeny (*Kemeny's voting scheme*)
- méthode de Condorcet-Kemeny-Young-Levenglick (*Condorcet-Kemeny-Young-Levenglick method*)
- problème de l'ordre médian (*median order problem*)
- classement par popularité VoteFair



Matériel supplémentaire



Matériel supplémentaire - critères de systèmes électoraux

La médiane de permutation, aussi nommée "**méthode de Kemeny-Young**", est un système électoral préférentiel avec m électeurs et n candidats.

Critères (propriétés mathématiques)

anonymité, calculabilité, Condorcet, **consistance**, domaine non-restraint, **indépendance des alternatives non-pertinentes**, **independance locale des alternatives non-pertinentes**, majorité, monotonie, neutralité, **non-dictature**, **non-imposition**, Pareto, participation, renforcement, symétrie inverse et **temps de calcul polynomial**.

La méthode de Kemeny-Young est **localement stable** Young (1990).



Matériel supplémentaire

listes d'heuristiques des études comparatives:

Algorithme	Articles	Schalekamp et van Zuylen 2009	Ali et Meila 2012
Pick-a-perm		x	x
BestOfA (best-of-k)		x	x
Random permutation		x	
Borda		x	x
Copeland		x	x
CopelandWins			
Schulze			
RankedPairs			
Plurality			
Raynaud			
Minimax			
MC4		x	x
MC4Approx		x	x
Footrule aggregation		x	x
MEDRank			
CSS			x
Greedy graph heuristic			
KwikSort		x	x
DetQuickSort		x	x
LogQuickSort		x	x
MergeSort		x	x
InsertionSort		x	x
Chanas		x	x
ChanasBoth			
Beam search			x
LPRelaxation (borne inf.)		x	x
LpKwikSort (Ailon-3/2)			
FindMedian			
VNS			
QUICK			
FAST			
Subiterative Convergence			
Greedy Algorithm			
FUR			
SigFUR			
GA			
DECoR			
Simulated Annealing			



Matériel supplémentaire - stats MOT vs MOTE

$m \setminus n$	8	10	15	20	25	30	40	50	60	80	100
3	0.7642	0.7179	0.6345	0.5792	0.5378	0.5059	0.4608	0.4312	0.4086	0.3775	0.3563
4	0.6010	0.5757	0.5201	0.4761	0.4406	0.4127	0.3700	0.3404	0.3176	0.2833	0.2612
5	0.7381	0.6853	0.5813	0.5046	0.4470	0.4038	0.3456	0.3073	0.2793	0.2413	0.2191
10	0.6440	0.6019	0.5173	0.4515	0.4012	0.3617	0.3040	0.2649	0.2354	0.1979	0.1726
15	0.7392	0.6732	0.5445	0.4581	0.3987	0.3544	0.2946	0.2543	0.2254	0.1869	0.1612
20	0.6739	0.6262	0.5248	0.4484	0.3917	0.3486	0.2896	0.2491	0.2209	0.1819	0.1566
25	0.7463	0.6774	0.5440	0.4557	0.3939	0.3497	0.2867	0.2480	0.2186	0.1800	0.1540
30	0.6899	0.6391	0.5307	0.4496	0.3904	0.3464	0.2852	0.2448	0.2164	0.1775	0.1536
35	0.7490	0.6804	0.5467	0.4563	0.3928	0.3474	0.2846	0.2438	0.2156	0.1770	0.1517
40	0.7008	0.6473	0.5349	0.4505	0.3905	0.3448	0.2833	0.2438	0.2142	0.1764	0.1518
45	0.7522	0.6836	0.5484	0.4570	0.3924	0.3473	0.2847	0.2427	0.2141	0.1764	0.1507
50	0.7095	0.6533	0.5367	0.4518	0.3908	0.3450	0.2827	0.2431	0.2138	0.1755	0.1501

$m \setminus n$	10	15	20	30	40	50	60	80	100	120	150	200	250
3	0.949	0.878	0.808	0.701	0.630	0.578	0.540	0.486	0.450	0.423	0.395	0.365	0.345
4	0.995	0.977	0.937	0.806	0.672	0.573	0.506	0.421	0.369	0.334	0.297	0.259	0.235
5	0.896	0.801	0.716	0.595	0.516	0.461	0.419	0.360	0.319	0.288	0.255	0.218	0.193
10	0.931	0.823	0.709	0.548	0.454	0.393	0.349	0.289	0.250	0.221	0.190	0.156	0.134
15	0.818	0.704	0.612	0.488	0.411	0.358	0.319	0.264	0.227	0.200	0.172	0.140	0.120
20	0.876	0.748	0.637	0.492	0.407	0.351	0.311	0.255	0.217	0.193	0.164	0.133	0.113
25	0.797	0.679	0.587	0.465	0.389	0.337	0.300	0.247	0.211	0.185	0.159	0.129	0.109
30	0.850	0.718	0.610	0.472	0.391	0.337	0.298	0.244	0.208	0.182	0.155	0.125	0.106
35	0.787	0.667	0.575	0.454	0.380	0.328	0.291	0.239	0.204	0.179	0.152	0.123	0.104
40	0.834	0.702	0.596	0.462	0.382	0.330	0.291	0.238	0.203	0.178	0.152	0.122	0.103
45	0.780	0.660	0.568	0.447	0.374	0.323	0.286	0.235	0.200	0.176	0.150	0.121	0.102
50	0.823	0.691	0.587	0.455	0.376	0.324	0.287	0.234	0.200	0.175	0.149	0.1200	0.101
100	0.797	0.665	0.566	0.440	0.365	0.314	0.277	0.227	0.193	0.169	0.143	0.115	0.097



Matériel supplémentaire - SA

Pseudo-code SA

```
solCourante ← solInitiale
```

```
for i ← 1 . . . nbSteps
```

```
    solAlternative ← neighbour(solCourante)
```

```
     $\Delta E \leftarrow d_{KT}(solAlternative, \mathcal{A}) - d_{KT}(solCourante, \mathcal{A})$ 
```

```
    if ( $\Delta E \leq 0$ )     "bonne solution"
```

```
        solCourante ← solAlternative
```

```
    else if ( $rand[0, 1] < e^{-\Delta E/T}$ )    "mauvaise solution"
```

```
        solCourante ← solAlternative
```

```
     $T \leftarrow T \times \alpha$ 
```

```
retourne solCourante
```



Matériel supplémentaire - Stats SA

m/n	30	40	50	60	70
3	99.30%	99.50%	98.20%	95.50%	96.30%
4	98.90%	99.70%	99.40%	99.00%	98.10%
5	98.80%	97.10%	96.60%	96.10%	91.00%
10	100.00%	100.00%	98.20%	98.60%	94.30%
15	99.10%	98.50%	91.90%	84.70%	74.20%
20	100.00%	99.90%	97.00%	97.00%	95.80%
25	99.60%	94.30%	89.10%	76.90%	67.40%
30	99.40%	99.20%	99.50%	95.80%	93.60%
35	99.80%	97.60%	89.00%	77.00%	66.10%
40	99.90%	99.60%	97.20%	93.00%	89.10%
45	99.60%	98.20%	89.90%	77.90%	56.60%
50	100.00%	99.10%	97.70%	94.80%	87.30%



Matériel supplémentaire - borne inf.¹

{[7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],
[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4], \Rightarrow [5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6]}

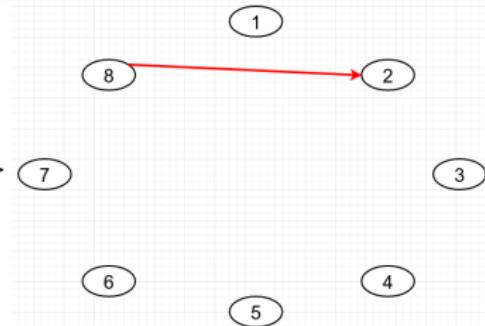


Figure: Graphe de tournoi: construction

¹V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam, *Improved bounds for computing Kemeny rankings*, Proceedings of the 21st conference on Artificial intelligence - Volume 1, AAAI'06, pp. 620–626, 2006.



Matériel supplémentaire - borne inf.¹

{[7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],
[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4], \Rightarrow [5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6]}

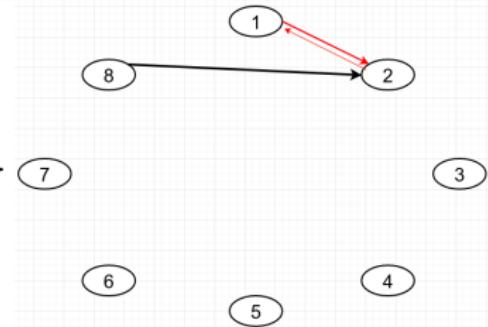


Figure: Graphe de tournoi: construction

¹V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam, *Improved bounds for computing Kemeny rankings*, Proceedings of the 21st conference on Artificial intelligence - Volume 1, AAAI'06, pp. 620–626, 2006.



Matériel supplémentaire - borne inf. ¹

{[7, 8, 2, 3, 6, 1, 5, 4],
[3, 5, 1, 7, 8, 6, 2, 4],
[5, 8, 3, 4, 1, 2, 7, 6]} →

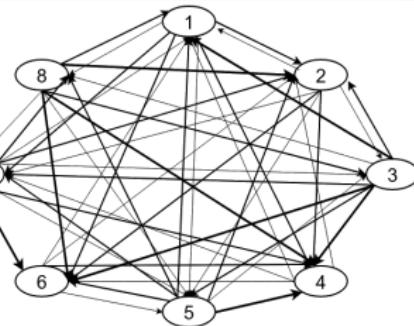


Figure: Graphe de tournoi: borne inférieure = 0

¹V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam, *Improved bounds for computing Kemeny rankings*, Proceedings of the 21st conference on Artificial intelligence - Volume 1, AAAI'06, pp. 620–626, 2006.



Matériel supplémentaire - borne inf. ¹

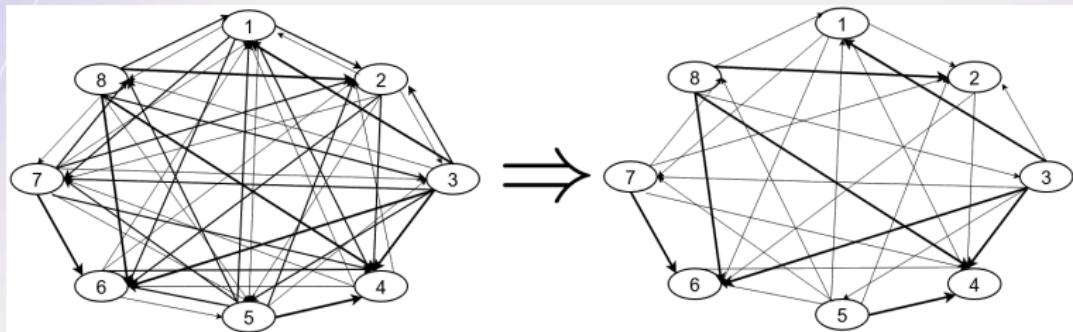


Figure: Graphe de tournoi: borne inférieure = 20

¹V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam, *Improved bounds for computing Kemeny rankings*, Proceedings of the 21st conference on Artificial intelligence - Volume 1, AAAI'06, pp. 620–626, 2006.



Matériel supplémentaire - borne inf. ¹

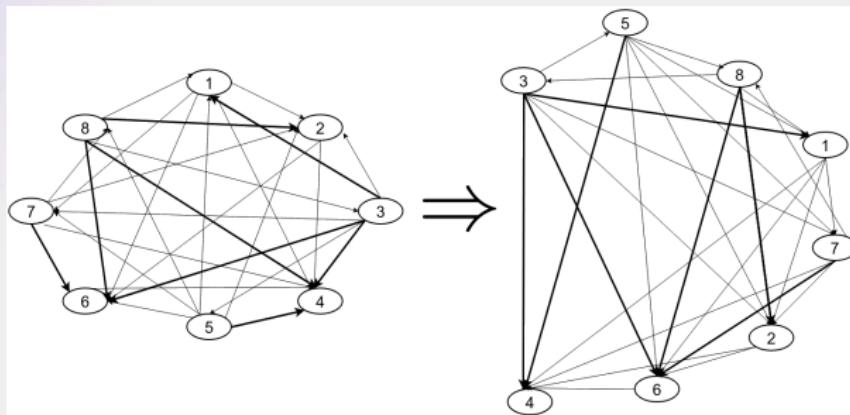


Figure: Graphe de tournoi: borne inférieure = 20

¹V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam, *Improved bounds for computing Kemeny rankings*, Proceedings of the 21st conference on Artificial intelligence - Volume 1, AAAI'06, pp. 620–626, 2006.



Matériel supplémentaire - borne inf. ¹

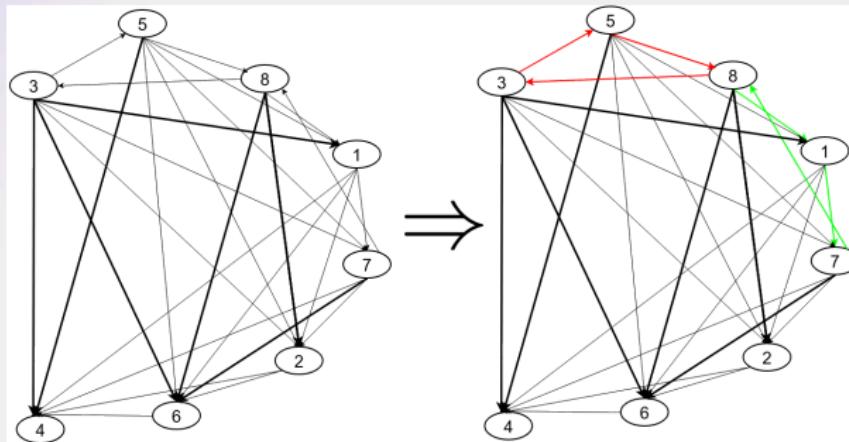


Figure: Graphe de tournoi: borne inférieure = $20 + \textcolor{red}{1} + \textcolor{green}{1}$

¹V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam, *Improved bounds for computing Kemeny rankings*, Proceedings of the 21st conference on Artificial intelligence - Volume 1, AAAI'06, pp. 620–626, 2006.



Matériel supplémentaire - borne inf. ¹

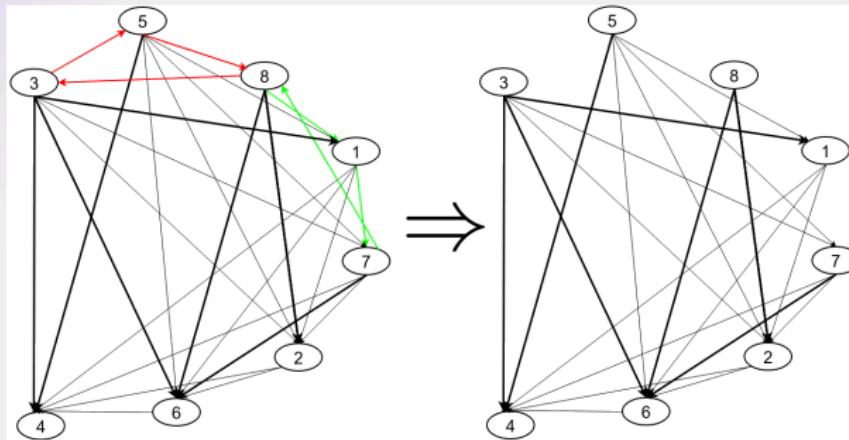


Figure: Graphe de tournoi: borne inférieure = 22

¹V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam, *Improved bounds for computing Kemeny rankings*, Proceedings of the 21st conference on Artificial intelligence - Volume 1, AAAI'06, pp. 620–626, 2006.



Matériel supplémentaire - MOT vs MOT+LUBC

a)

m/n	10	15	20	25	30	35	40	45
3	0.718	0.635	0.579	0.537	0.506	0.481	0.461	0.447
5	0.687	0.595	0.530	0.481	0.444	0.413	0.387	0.361
10	0.606	0.524	0.465	0.420	0.384	0.356	0.333	0.310
15	0.693	0.579	0.500	0.442	0.400	0.366	0.340	0.316
20	0.632	0.540	0.472	0.423	0.383	0.351	0.326	0.306
25	0.699	0.581	0.500	0.442	0.398	0.362	0.333	0.312
30	0.647	0.550	0.479	0.426	0.386	0.352	0.323	0.301
35	0.703	0.584	0.501	0.441	0.396	0.363	0.334	0.309
40	0.656	0.556	0.483	0.428	0.388	0.355	0.328	0.307
45	0.706	0.587	0.502	0.443	0.397	0.360	0.335	0.306
50	0.663	0.562	0.486	0.431	0.388	0.354	0.325	0.301

b)

m/n	10	15	20	25	30	35	40	45
3	0.933	0.921	0.885	0.817	0.725	0.626	0.560	0.513
5	0.928	0.913	0.859	0.746	0.605	0.495	0.428	0.381
10	0.842	0.845	0.809	0.729	0.616	0.498	0.409	0.347
15	0.948	0.939	0.890	0.755	0.569	0.436	0.368	0.328
20	0.888	0.884	0.843	0.746	0.597	0.462	0.377	0.327
25	0.958	0.949	0.903	0.771	0.579	0.432	0.358	0.322
30	0.907	0.904	0.861	0.755	0.589	0.448	0.364	0.317
35	0.964	0.955	0.909	0.778	0.582	0.435	0.359	0.320
40	0.919	0.915	0.873	0.759	0.590	0.446	0.362	0.323
45	0.968	0.959	0.913	0.784	0.586	0.433	0.363	0.317
50	0.928	0.923	0.881	0.766	0.589	0.441	0.358	0.314

c)

n	10	15	20	25	30	35	40	45
nblInstances	100000	80000	50000	20000	10000	4000	2000	1000



Matériel supplémentaire - MOTE vs MOTE+LUBC

m/n	10	15	20	25	30	35	40	45
3	0.948	0.878	0.808	0.750	0.702	0.665	0.629	0.604
5	0.896	0.800	0.715	0.647	0.595	0.554	0.517	0.490
10	0.930	0.824	0.709	0.616	0.549	0.497	0.452	0.419
15	0.818	0.704	0.612	0.543	0.490	0.444	0.412	0.383
20	0.876	0.747	0.636	0.553	0.493	0.446	0.407	0.377
25	0.796	0.680	0.587	0.518	0.465	0.425	0.392	0.363
30	0.851	0.720	0.610	0.530	0.472	0.428	0.389	0.362
35	0.787	0.668	0.575	0.506	0.453	0.411	0.378	0.345
40	0.836	0.702	0.596	0.519	0.461	0.415	0.384	0.354
45	0.780	0.660	0.568	0.499	0.448	0.406	0.374	0.350
50	0.824	0.691	0.586	0.512	0.456	0.413	0.379	0.352

m/n	10	15	20	25	30	35	40	45
3	0.977	0.966	0.952	0.924	0.873	0.809	0.727	0.669
5	0.964	0.954	0.929	0.867	0.766	0.654	0.567	0.516
10	0.972	0.951	0.915	0.848	0.747	0.635	0.528	0.454
15	0.960	0.953	0.919	0.823	0.668	0.525	0.446	0.398
20	0.962	0.945	0.908	0.824	0.697	0.554	0.455	0.399
25	0.965	0.958	0.923	0.820	0.653	0.504	0.421	0.375
30	0.962	0.947	0.910	0.820	0.674	0.529	0.429	0.379
35	0.969	0.961	0.926	0.819	0.642	0.486	0.406	0.356
40	0.963	0.950	0.912	0.815	0.660	0.509	0.420	0.371
45	0.972	0.964	0.927	0.818	0.638	0.486	0.401	0.363
50	0.965	0.952	0.914	0.816	0.654	0.506	0.416	0.366

n	10	15	20	25	30	35	40	45
nblInstances	100000	80000	50000	20000	10000	4000	2000	1000



Matériel supplémentaire - Approches combinées (ILP)

$$\text{minimiser : } \sum_{i < j, i,j \in \{1, \dots, n\}} R_{ij}(A) x_{ij} \quad (1)$$

sujet aux contraintes:

$$x_{ij} + x_{ji} = 1, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \geq 1, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Où $R_{ij}(A)$ est le nombre de permutations de A où $j \prec i$.

Où x_{ij} est la variable indiquant $i \prec j$ dans la solution.

Cela reviens au modèle du LOP.



Matériel supplémentaire - données

Le mélange **Fisher-Yates** est une méthode très simple qui permet de générer aléatoirement une permutation d'une taille donnée.

Dans la première étape, une liste est créée qui contient les éléments 1 à n ordonnés en ordre croissant.

En deuxième étape, les positions sont parcourues itérativement de la dernière à la première. À chaque position i parcourue, on pige aléatoirement et uniformément une seconde position j telle que $1 \leq j \leq i$ et on échange ces deux éléments dans les positions i et j .

Il est prouvé que cette génération aléatoire est uniforme dans l'espace des permutations S_n .



Matériel supplémentaire - données

Format PrefLib:

5

1, Peinture

2, Ballon

3, Cinéma

4, Sciences

5, Nature

3,3,3

1,4,5,1,2,3

1,1,5,3,4,2

1,5,2,3,4,1



Matériel supplémentaire - Sketch of proof M3P

Let (i, j) be a pair of elements such that the corresponding edge is not contained in any 3-cycle. Now suppose by contradiction: $\pi^* = \dots jKi\dots$. We separate the set K of elements in 5 classes:

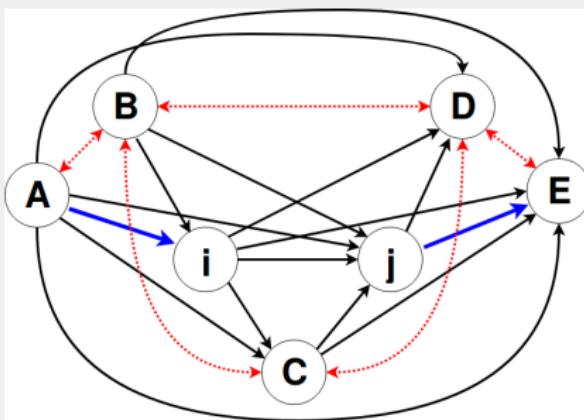
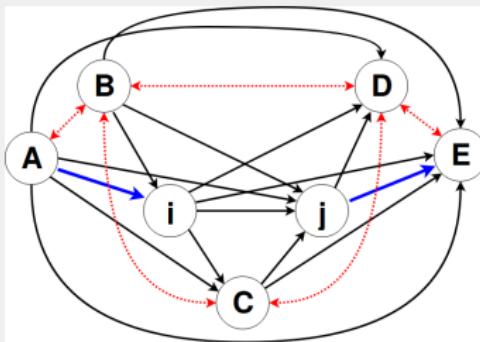


Figure: A black arrow is a preference relation, a blue bold arrow is an "Always" relation and a red two-sided dotted arrow is an unknown relation.



Matériel supplémentaire - Sketch of proof M3P

$$\pi^* = \dots j K i \dots$$



Step 1)

$e, a \in K$ with $e \in E$ and $a \in A \implies e \not\sim_{\pi^*} a$

$\pi^* = \dots j \dots e S a \dots i \dots$ becomes $\pi'^* = \dots j \dots a e S \dots i \dots$ or $\pi'^* = \dots j \dots S a e \dots i \dots$

Step 2)

$k \in K \implies k \notin A \cup E$

$\pi^* = \dots j S a \dots i \dots$ becomes $\pi'^* = \dots a j S \dots i \dots$ or $\pi'^* = \dots S a j \dots i \dots$

Step 3)

K with only elements from $B \cup C \cup D$: swap i and j

$\pi^* = \dots j K i \dots$ becomes $\pi'^* = \dots i K j \dots$



Matériel supplémentaire - Résultats M3P

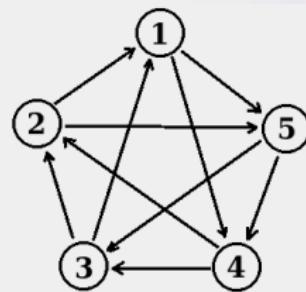
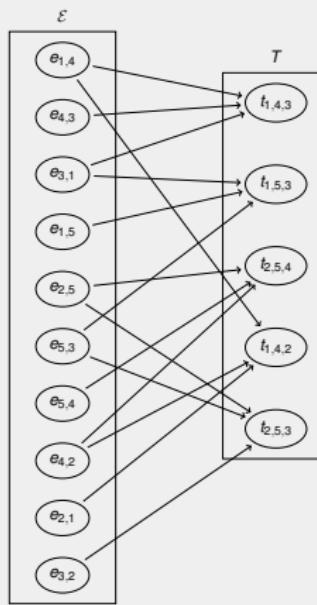
ID	n	A		B		C		D	
		# 3-cycles	max # 3-cycles	A/B	nb constr.	max nb constr.	C/D		
ex1	29	78	1015	7.7%	302	406	74.4%		
ex2	20	2	330	0.6%	185	190	97.4%		
ex3	44	0	3542	0%	946	946	100%		
ex4	64	124	10912	1.1%	1848	2016	91.7%		
ex5	24	0	572	0%	276	276	100%		
ex6	67	1116	12529	8.9%	1457	2211	65.9%		
ex7	23	1	506	0.2%	250	253	98.8%		

ID	n	E		F		G	
		time ILP normal	time ILP 3 cyc.thm.	acc. factor E/F	time 3HS	acc. factor E/G	
ex1	29	57.033	23.992	2.4	1.507	37.8	
ex2	20	17.791	4.582	3.9	0.285	62.4	
ex3	44	192.875	35.615	5.4	0.241	799.8	
ex4	64	622.724	192.885	3.2	4.915	126.7	
ex5	24	30.349	5.614	5.4	0.072	419.6	
ex6	67	995.763	388.635	2.6	28.514	34.9	
ex7	23	27.296	7.602	3.6	0.369	74.0	



Matériel supplémentaire - contre-ex. any 3HS M3P

$$R = \{32154, 42531, 15432\}$$



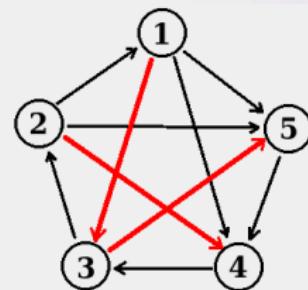
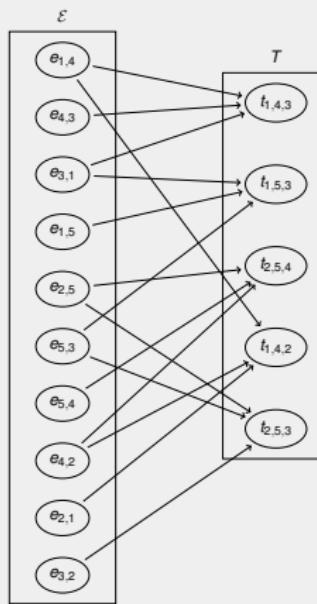
Choix de 31,53 et 42: pas de médiane

Choix de 43,53 et 42 ou 15,25 et 14: médiane ok



Matériel supplémentaire - contre-ex. any 3HS M3P

$$R = \{32154, 42531, 15432\}$$



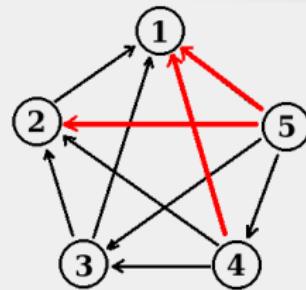
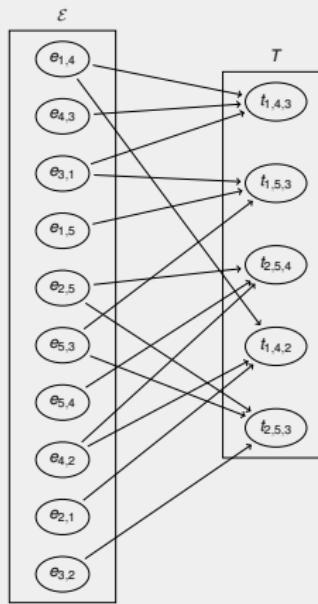
Choix de 31,53 et 42: pas de médiane

Choix de 43,53 et 42 ou 15,25 et 14: médiane ok



Matériel supplémentaire - contre-ex. any 3HS M3P

$$R = \{32154, 42531, 15432\}$$



Choix de 31,53 et 42: pas de médiane

Choix de 43,53 et 42 ou 15,25 et 14: médiane ok



Matériel supplémentaire - ex. 3HS

Set R (3) :

[7,10,14,15,11,4,12,13,2,1,5,8,9,3,6]

[6,12,11,9,10,3,1,4,15,8,5,7,13,2,14]

[15,4,6,3,7,10,13,5,1,11,9,14,2,12,8]

Simulated Annealing:

[10,15,4,6,7,11,12,3,13,1,5,9,14,2,8] (88)

LowerBound_1:

82

Reversed Minor Order Pairs in SA

/ Selected Minor Order Edges in 3HS:

3_9

3_7

12_14

6_10

7_10

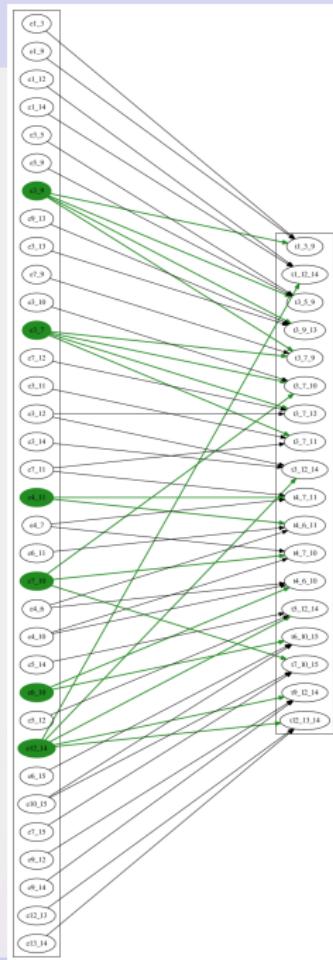
4_11

Optimal Kemeny Score (CPLEX):

88

Optimal 3-Hitting Set solution #edges (CPLEX):

6



Matériel supplémentaire - Définitions classements

Relations d'ordre possible (Pierre Andrieu)

- i précède j
- j précède i
- i et j à égalité
- i absent
- j absent
- i et j absents

On utilise un schéma de score pour calculer le score d'un classement.

Matrices de coût

- CR_{ij} coût de mettre i à droite de j
- CL_{ij} coût de mettre i à gauche de j
- CE_{ij} coût de mettre i à égalité avec j

Matériel supplémentaire - Égalité et compressions

$$\mathcal{R} = \{ \quad [\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{7, 6\}, \{8\}, \{5\}], \\ [\{5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{8\}], \\ [\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8\}] \quad \}$$

- $1' = \{1, 2, 3\}$
- $2' = \{4\}$
- $3' = \{5\}$
- $4' = \{6, 7\}$
- $5' = \{8\}$

$$\mathcal{R}' = \{ \quad [\{1'\}, \{2'\}, \{4'\}, \{5'\}, \{3'\}], \\ [\{3', 4'\}, \{1', 2'\}, \{5'\}], \\ [\{1', 2', 3'\}, \{4', 5'\}] \quad \}$$



Matériel supplémentaire - Interférence bornée classements

Généralisation des contraintes MOT.

Propriété d'égalité et avant-après avec interférence bornée

Si i et j sont assez souvent dans un même ordre relatif dans les classements et que lorsqu'ils ne sont pas dans cet ordre, il y a assez peu d'éléments qui se retrouvent entre-eux, alors cette paire devrait se retrouver dans cet ordre dans le consensus.



Matériel supplémentaire - Interférence bornée classements

Généralisation des contraintes MOT.

Propriété d'égalité et avant-après avec interférence bornée

Si i et j sont assez souvent dans un même ordre relatif dans les classements et que lorsqu'ils ne sont pas dans cet ordre, il y a assez peu d'éléments qui se retrouvent entre-eux, alors cette paire devrait se retrouver dans cet ordre dans le consensus.



Matériel supplémentaire - Interférence bornée classements

```
R_1: [[7], [2, 3], [1, 4, 5, 41, 31], [8], [27, 43], [42], [40], [6], [17], [38], [39, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 30], [21], [15], [29], [32, 33, 35, 36, 37, 28, 44, 45], [18, 34, 25, 26]]  
R_2: [[7], [1, 2, 3, 4, 5, 41, 31], [8], [17, 6], [38, 40, 42, 27, 43, 29, 15], [9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 44, 45]]  
R_3: [[7], [1, 2, 4, 5, 41, 31], [3], [27], [8], [6, 42, 43], [36, 38, 39, 40, 9, 10, 11, 12, 44, 13, 14, 16, 19, 22, 23], [17], [33, 24, 45, 15], [32, 20, 29, 30], [35, 21, 37], [28], [18, 34, 25, 26]]  
R_4: [[7], [2, 3], [1, 4, 5, 41, 31], [8], [6], [17, 40, 27, 43], [29, 15], [18, 34, 21, 38, 25, 26, 42], [32, 33, 35, 36, 37, 39, 9, 10, 11, 12, 44, 13, 45, 14, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 28, 30]]
```

- Les éléments 2 et 3 pourraient être à égalité dans un consensus
- Ensemble d'interférence: $Y_{ij}^{\mathcal{R}} = \{1, 4, 5, 31, 41\}$
- Considérer les cas $2 \prec 3$ et $3 \prec 2$
- Considérer les pires placements des éléments de l'ensemble d'interférence pour chaque cas
- Calculer le coût d'un changement pour mettre 2 et 3 ensemble



Matériel supplémentaire - exemple d'application

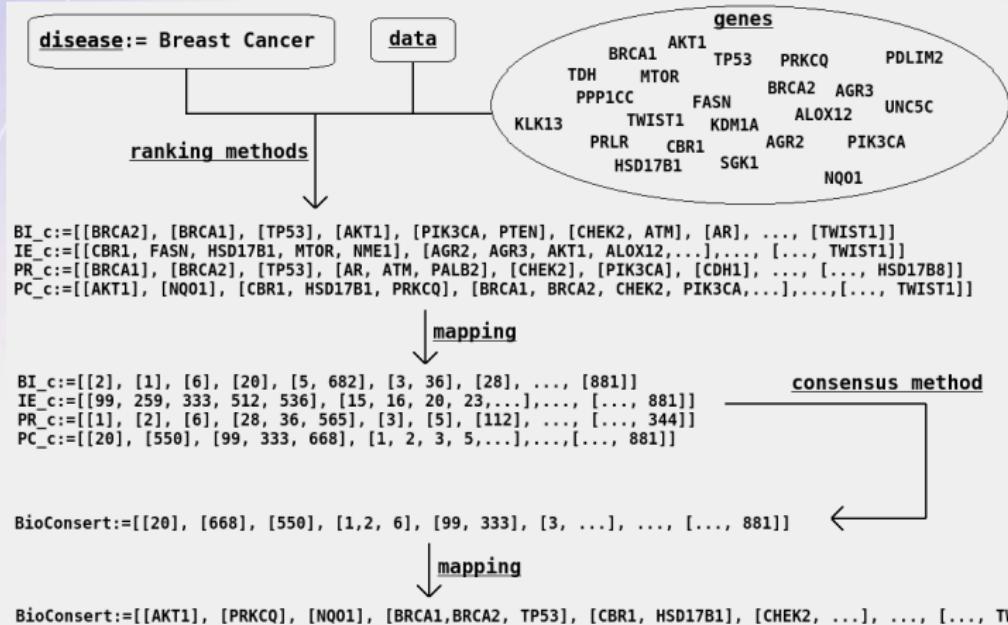


Figure: Quatre méthodes de classements de gènes utilisées : BI=Bioggle, IE=In Edge, PR=Page Rank et PC=Path Count. Consensus donné par BioConsent. Projet BioGuide <http://bioguide-project.net/bioconsert/>.



Matériel supplémentaire

modèle ILP classements:

$$\text{minimiser : } \sum_{i < j, i,j \in \{1, \dots, n\}} (R_{ij}(\mathcal{R}) + E_{ij}(\mathcal{R})) x_{i \prec j} + (L_{ij}(\mathcal{R}) + E_{ij}(\mathcal{R})) x_{i \succ j} + p(R_{ij}(\mathcal{R}) + L_{ij}(\mathcal{R})) x_{i \equiv j} \quad (5)$$

sujet aux contraintes:

$$x_{i \prec j} + x_{i \succ j} + x_{i \equiv j} = 1, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (6)$$

$$x_{i \prec k} - x_{i \prec j} - x_{j \prec k} \geq -1, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\} \quad (7)$$

$$2x_{i \prec j} + 2x_{i \succ j} + 2x_{j \prec k} + 2x_{j \succ k} - x_{i \prec k} - x_{i \succ k} \geq 0, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\} \quad (8)$$

$$x_{i \prec j}, x_{i \succ j}, x_{i \equiv j} \in \{0, 1\} \quad i < j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (9)$$