

# Tournées de véhicules

Robin Milosz

IFT6370

11 avril 2017



## 1 Introduction

## 2 Coupes et séparation

- Capacity (RCI)
- Framed capacity (FCI)
- Strengthened comb, Multistar and Hypotour

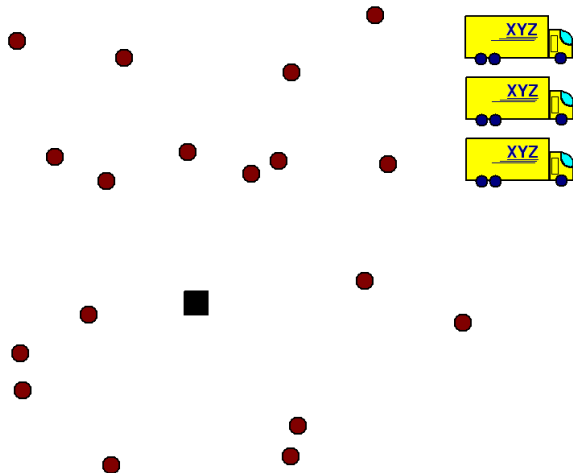
## 3 Branch-and-Cut

- Séparation
- Branchement et Sélection de noeud
- Cut pool

## 4 Résultats



# Problème de tournées de véhicules avec capacité



**Figure:** Capacitated Vehicle Routing Problem

# Problème de tournées de véhicules avec capacité

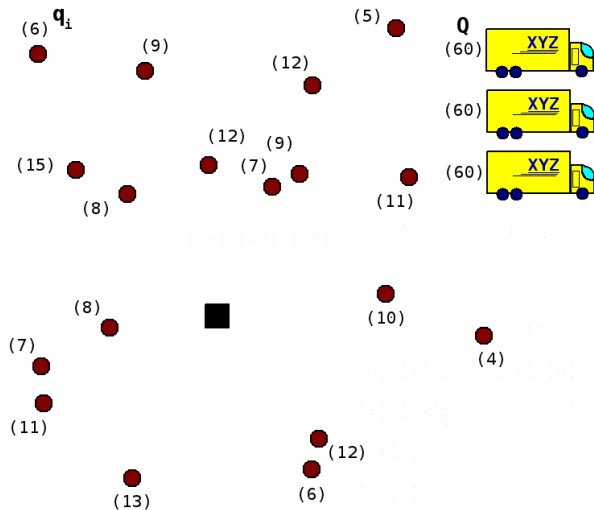


Figure: Capacitated Vehicle Routing Problem

# Problème de tournées de véhicules avec capacité

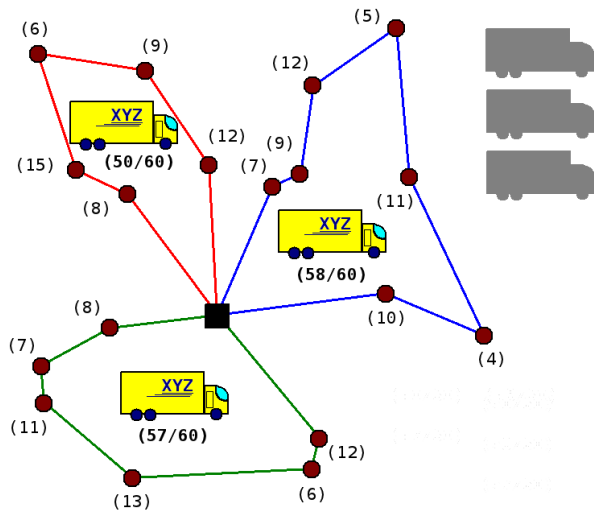


Figure: Capacitated Vehicle Routing Problem

# Modélisation (CVRP)

Graphe complet  $G = (V, E)$ , clients:  $V_c = V \setminus \{0\}$

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

sujet à:

$$x(\delta(\{i\})) = 2, \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2r(S), \quad (S \subseteq V_c, |S| \geq 2)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2\}, \quad (i = 0, j = 1, \dots, n)$$

$r(S) \rightarrow BPP$ , alors utiliser  $k(S) = \lceil q(S)/Q \rceil$  (RCI)



# Modélisation (CVRP)

Graphe complet  $G = (V, E)$ , clients:  $V_c = V \setminus \{0\}$

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

sujet à:

$$x(\delta(\{i\})) = 2, \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2r(S), \quad (S \subseteq V_c, |S| \geq 2)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2\}, \quad (i = 0, j = 1, \dots, n)$$

$r(S) \rightarrow BPP$ , alors utiliser  $k(S) = \lceil q(S)/Q \rceil$  (RCI)



Solution LP:  $x^*$

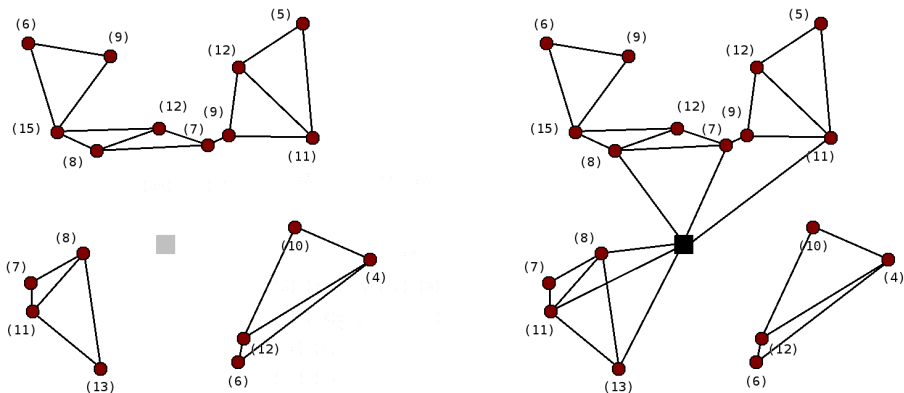
Graphe associé:  $G^* = (V, E^*)$ , où  $E^* = \{e \in E \mid x_e^* > 0\}$

$G_c^* = (V_c, E_c^*)$ , où  $V_c = V \setminus \{0\}$





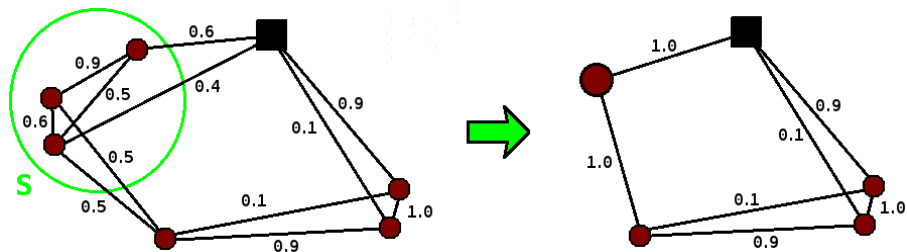
# 1ère heuristique RCI



**Figure:** RCI sur composantes connexes de  $G_C^*$  et de  $G^*$



# Réduction de graphe (safe shrinking)



Iterativement, candidats:

- $|S| = 2, 3$
- $k(S) = 1$  avec coupe RCI déjà généré
- $x(\delta(S)) = 2$  imposé par branchement

## 2e heuristique RCI

Fractionnal capacity:  $2q(S)/Q$

$$2r(S) \geq 2k(S) = 2 \lceil q(S)/Q \rceil \geq 2q(S)/Q$$

Vérifier  $2q(S)/Q$ : flôt maximal, temps polynomial



# 3e et 4e heuristique RCI

Réduire l'écart des RCI

## 3e heuristique RCI

Heuristique gloutonne

Construire  $S$  en minimisant les variable d'écart

## 4e heuristique RCI

Repasser par les coupes RCI

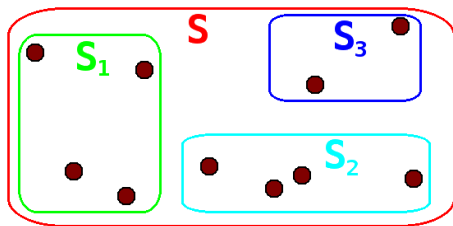
Jouer avec les supersommets (supervertices)



# Framed capacity (FCI)

$$\Omega = \{S_1, \dots, S_p\}, \quad S \subseteq V_c$$

$r(S, \Omega) = \min \text{vehicules} \mid \text{RCI avec egalite stricte pour } S_i$

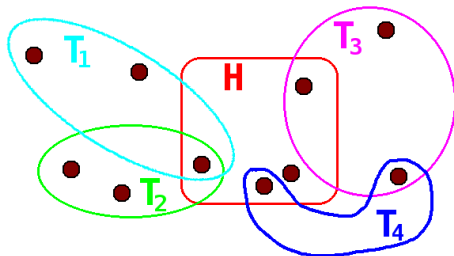


$$x(\delta(S)) + \sum_{i=1}^p x(\delta(S_i)) \geq 2r(S, \Omega) + 2 \sum_{i=1}^p r(S_i)$$

## Strengthened comb

$$S(H, T_1, \dots, T_t) := \sum_{j=1}^t (\tilde{r}(T_j \cap H) + \tilde{r}(T_j \setminus H) + \tilde{r}(T_j))$$

$$x(\delta(H)) + \sum_{j=1}^t x(\delta(T_j)) \geq S(H, T_1, \dots, T_t) + 1$$



# Strengthened comb, Multistar and Hypotour

## Multistar

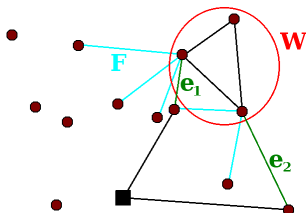
$$\alpha x(E(N)) + \beta x(E(N : S)) \leq \gamma, \quad S \subset V_c \setminus N$$

$$\alpha x(E(N)) + \beta x(E(C : S)) \leq \gamma, \quad C \subset N$$

## Hypotour

$$x(F) \geq 1$$

$$x(\delta(W)) + 2x(F) \geq 2x_{e_1} + 2x_{e_2}$$



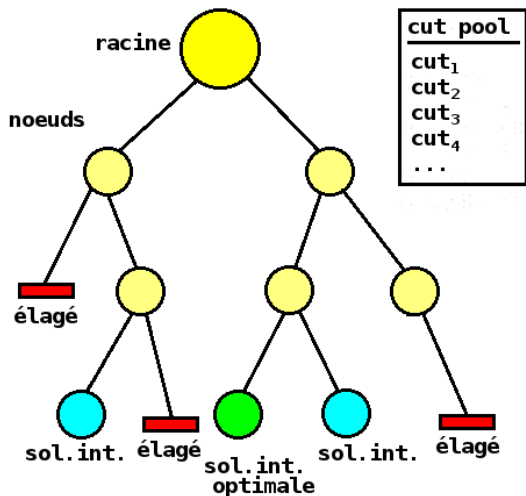


Figure: Branch-and-Cut



# Séparation

## Racine

*mezzo piano*

RCI RCI RCI

FCI FCI M C H C H M

H M C 1. Gomory 2. -

## Noeuds

*forte*

RCI# FCI Mstar

Comb Hypo. RCI

*Repeat and fade*

## Branchement

$$(x(\delta(S)) = 2) \wedge (x(\delta(S)) \geq 4)$$

prendre S tel que  $x^*(\delta(S)) \sim 3$

$$S_i \rightarrow LB_i^1, LB_i^2$$

$$S_i \text{ vs } S_j: \lceil LB_i^- \rceil > \lceil LB_j^- \rceil \text{ puis } \lceil LB_i^+ \rceil > \lceil LB_j^+ \rceil$$

## Sélection de noeud

Best bound first (et plus profond)



## Cut pool

Garder LP petit

Si LP réoptimisé, regarder dans le pool et réoptimiser au besoin

Dans les noeuds, "flusher" les coupes au fur et à mesure



**Table:** Exemple résultats

Instance	Q	loading	UB	Root node		Branch-and-Cut	
				LB	Time	Time(LB)	Tree size
E-n22-k4	6000	0.94	375*	375*	2	-	-
E-n23-k3	4500	0.75	569*	569*	2	-	-
E-n30-k3	4500	0.94	534*	534*	14	-	-
E-n33-k4	8000	0.92	835*	834.707	12	16	3
E-n51-k5	160	0.97	521*	519	24	59	17
E-n76-k7	220	0.89	682*	666.408	72	118683	8631
E-n76-k8	180	0.95	735*	717.852	136	(729)	2321
E-n76-k10	140	0.97	830	799.878	158	(816)	2209
E-n76-k14	100	0.97	1021	969.609	181	(986)	2081
E-n101-k8	200	0.91	815*	802.646	222	(811)	1621
E-n101-k14	112	0.93	1071	1026.94	555	(1040)	917
F-n45-k4	2010	0.90	724*	724*	6	-	-
F-n72-k4	30000	0.96	237*	237	38	40	3
F-n135-k7	2210	0.95	1162*	1160	155	3092	265
M-n101-k10	200	0.91	820*	820*	33	-	-



## Nouveauté

premier à résoudre:

- B-n50-k8
- B-n66-k9
- B-n78-k10

de Augerat



# Merci



- J. Lysgaard, A.N. Letchford, R.W. Eglese, *A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem*, Math. Program., Ser. A 100 (2004), pp.423–445  
doi: 10.1007/s10107-003-0481-8
- P. Augerat, J.M. Belenguer, E. Benavent, A. Corberan, D. Naddef, G. Rinaldi, *Computational results with a branch-and-cut code for the capacitated vehicle routing problem*, Research report RR949-M. ARTEMIS-IMAG, France, (1995)
- N. Christofides, S. Eilon *An algorithm for the vehicle dispatching problem*, Oper. Res. Quarterly 20 (1969), pp.309–318

